Nicolae Ivăşchescu

ALGEBRĂ

CULEGERE DE EXERCIŢII ŞI PROBLEME

Clasa a 8-a

- **TIPURI DE PROBLEME**
  - repere teoretice
  - probleme rezolvate
  - probleme propuse – rezolvări complete
- **PERFORMANȚĂ**
  - olimpiade și concursuri școlare

EDITURA CARMINIS
educațional

CUPRINS

I. INTERVALE DE NUMERE REALE
INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

I.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

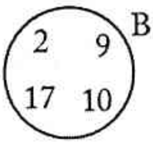
Încă din clasa a VI-a am primit noțiuni legate de mulțimi. Reamintim câteva dintre ele.

O mulțime M poate fi dată (definită) în trei moduri:

1. enumerând elementele ei;
2. folosind diagrame Venn-Euler;
3. dând o proprietate comună a elementelor.

De exemplu:

1. $A = \{3, 7, 13, 15\}$. Am enumerat elementele mulțimii A.

2. 

Am folosit o **diagramă** Venn-Euler.

3. $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ și $x = 2n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Proprietatea comună este că **elementele din** C sunt numere naturale pare.

Este nevoie să cunoaștem și rela**țiile dintre mulțimi** precum și operațiile cu mulțimi.

Două mulțimi A și B pot fi:

1) egale, $A = B$, dacă mulțimile au **aceleași elemente**;

2) una inclusă în cealaltă, de exemplu $A \subset B$, **dacă orice** elemente al mulțimii A este element și al mulțimii B. În **acest caz mulțimea** A se numește submulțime a mulțimii B.

Operațiile care pot fi efectuate cu **mulțimi sunt**:

1) reuniunea $(\cup)$;

2) intersecția $(\cap)$;

3) diferența $(\setminus)$.

Să ne reamintim mulțimile de numere.

Mulțimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ și $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Avem $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$.

Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z}=\{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^*\cup\{0\}=\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}^*=\{0\}$, $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_-\cup\mathbb{Z}_+\cup\{0\}$.

Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q}=\left\{x \mid x=\frac{y}{z},\ y, z\in\mathbb{Z},\ z\neq 0\right\}$.

Avem $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^*\cup\{0\}=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}^*=\{0\}$.

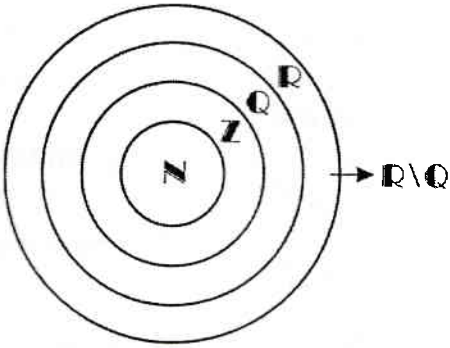
Mulțimea numerelor iraționale, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, este mulțimea numerelor reale care au o infinitate de zecimale care nu se repetă periodic.

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor iraționale și mulțimea numerelor raționale, $\mathbb{R}=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}$.

Avem $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^*\cup\{0\}=\mathbb{R}$.

Se cunosc incluziunile:

$\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.



PROBLEME REZOLVATE

1. Se dă mulțimea:

$$A=\left\{\sqrt{\frac{2020}{505}};\ \frac{2020}{-5};\ \sqrt{2020};\ \sqrt{2020\frac{1}{2}};\ -\frac{2020}{101};\ \sqrt{\frac{2020}{101}};\ 20,(20)\right\}.$$

Aflați: a) $A\cap\mathbb{Z}$; b) $A\cap\mathbb{N}$; c) $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

Rezolvare

Mulțimea A se mai scrie:

$$A=\left\{2;\ -404;\ 2\sqrt{505};\ \sqrt{\frac{4041}{2}};\ -20;\ 2\sqrt{5};\ 20,(20)\right\}.$$

Avem:

a) $A\cap\mathbb{Z}=\left\{\sqrt{\frac{2020}{505}},\ \frac{2020}{-5},\ -\frac{2020}{101}\right\}$; b) $A\cap\mathbb{N}=\left\{\sqrt{\frac{2020}{505}}\right\}$;

c) $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left\{\sqrt{2020},\ \sqrt{2020\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{2020}{101}}\right\}$.

2. Determinați numerele naturale n pentru care:

a) $\frac{2020}{2n-1} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{2017}{4n-3} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{2019}{2n-3} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare

a) Avem $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Pentru a avea $\frac{2020}{2n-1} \in \mathbb{N}$ înseamnă că $2n-1 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020\}$; $2n-1=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow n=1$, $2n-1=2 \Rightarrow 2n=3 \Rightarrow n=\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$; $2n-1$ este număr impar, de aceea trebuie să-l egalăm numai cu numere impare $\Rightarrow 2n-1=5 \Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3$, $2n-1=101 \Rightarrow 2n=102 \Rightarrow n=51$, $2n-1=505 \Rightarrow 2n=506 \Rightarrow n=253$.

Am găsit $n \in \{1, 3, 51, 253\}$.

b) 2017 este număr prim, deci $4n-3 \in \{\pm 1, \pm 2017\}$; $4n-3=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4n=4 \Leftrightarrow n=1$; $4n-3=-1 \Leftrightarrow 4n=2 \Leftrightarrow n=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$; $4n-3=2017 \Rightarrow$ $\Rightarrow 4n=2020 \Rightarrow n=505$; $4n-3=-2017 \Rightarrow 4n=-2014 \Rightarrow n=-\frac{1007}{2} \notin \mathbb{N}$.

Deci, $n \in \{1, 505\}$.

c) $2019 = 3 \cdot 673 \Rightarrow 2n-3 \in \{1, 3, 673, 2019\} \Rightarrow 2n-3=1 \Leftrightarrow 2n=4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n=2$; $2n-3=3 \Leftrightarrow 2n=6 \Leftrightarrow n=3$; $2n-3=673 \Leftrightarrow 2n=676 \Leftrightarrow n=338$; $2n-3=2019 \Leftrightarrow 2n=2022 \Leftrightarrow n=1011$. Deci, $n \in \{2, 3, 338, 1011\}$.

3. Se dau mulțimile:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \setminus \{8\} \mid \frac{6}{x-8} \in \mathbb{N}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{N} \setminus \{6\} \mid \frac{8}{x-6} \in \mathbb{N}\right\}$.

Găsiți valoarea de adevăr a propoziției $A \cap B = \{10, 14\}$.

Rezolvare

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow x-8 \in \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-8=1 \Rightarrow x=9 \\ x-8=2 \Rightarrow x=10 \\ x-8=3 \Rightarrow x=11 \\ x-8=6 \Rightarrow x=14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = \{9, 10, 11, 14\}$.

$$D_8=\{1,2,4,8\}\Rightarrow x-6\in\{1,2,4,8\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} x-6=1\Rightarrow x=7\\ x-6=2\Rightarrow x=8\\ x-6=4\Rightarrow x=10\\ x-6=8\Rightarrow x=14\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow B=\{7,8,10,14\}$.

Deducem că $A\cap B=\{10,14\}$, prin urmare propoziția este adevărată.

4. Să se găsească numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $\dfrac{\overline{ab}}{a+b+6}=3$.

Rezolvare

Pentru a lucra numai cu cifrele a și b îl scriem pe $\overline{ab}$ explicit în baza 10 și avem $\overline{ab}=10a+b$. După înlocuire avem $\dfrac{10a+b}{a+b+6}=3\Rightarrow 10a+b=3(a+b+6)$ sau încă $10a+b=3a+3b+18\Leftrightarrow 10a=3a+3b+18-b\Leftrightarrow 10a=3a+2b+18\Rightarrow$ $\Rightarrow 2b+18=10a-3a\Leftrightarrow 2b+18=7a$ de unde deducem că $2b+18$ trebuie să fie multiplu al lui 7. Descoperim că $2b+18$ este par, deci 7a este multiplu de 7, par. Multiplii pari ai lui 7 sunt 14, 28, 42, 56, 70, ... Este clar că $2b+18\neq 14$. Pentru $2b+18=28\Rightarrow 2b=10\Rightarrow b=5$ și $2\cdot 5+18=7a\Rightarrow 7a=28\Rightarrow a=4\Rightarrow$ $\Rightarrow\overline{ab}=45$. Pentru $2b+18=42\Rightarrow 2b=42-18\Rightarrow 2b=24\Rightarrow b=12\Rightarrow$ Nu convine, cu atât mai mult ceilalți multipli nu convin.

Am găsit $\overline{ab}=45$.

5. Se dau mulțimile de numere naturale $A=\{x, 2x-1, x+4, 3x\}$ și $B=\{3x-6, x+2, 3x-2, 2x+3\}$.

Determinați x astfel încât $A=B$.

Rezolvare

Soluția 1. Luăm din mulțimea A elementul 3x și verificăm cu cine ar putea fi egal din mulțimea B. Îl egalăm pe 3x cu toate elementele din B:

$3x=3x-6\Rightarrow 0=-6$ (F) $\Rightarrow$ Nu convine.

$3x=x+2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$. Pentru $x=1$ mulțimile devin $A=\{1,1,5,3\}$, dar nu convine (sunt două elemente egale).

Încercăm mai departe: $3x=3x-2\Rightarrow 0=-2$ (F) $\Rightarrow$ Nu convine.

Pentru $3x=2x+3\Rightarrow x=3$. Pentru $x=3$ cele două mulțimi sunt $A=\{3,5,7,9\}$ și $B=\{3,5,7,9\}$, deci într-adevăr sunt egale.

Soluția 2. Mai scurtă este soluția următoare: Dacă cele două mulțimi sunt egale, înseamnă că au aceleași elemente, deci suma elementelor din A trebuie să fie egală cu suma elementelor din B.

Avem $S_A = x + 2x - 1 + x + 4 + 3x = 7x + 3$ și $S_B = 3x - 6 + x + 2 + 3x - 2 + 2x + 3 = 9x - 3$. Din $S_A = S_B$ obținem $7x + 3 = 9x - 3 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$ și deci $A = \{3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{3, 5, 7, 9\}$.

6. Arătați că fracția $\dfrac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} - 15^n}{\overline{abcabc}}$ este reductibilă.

Rezolvare

Aducem la forma cea mai simplă numărătorul, respectiv numitorul:

$3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} - 15^n = 3^n \cdot 9 \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^n \cdot 25 - 3^n \cdot 5^n = 3^n \cdot 5^n (9 + 25 - 1) = 3^n \cdot 5^n \cdot 33 = 3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 11;$

$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 10^3 + \overline{abc} = \overline{abc}(1000 + 1) = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13.$

Avem $\dfrac{3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} - 15^n}{\overline{abcabc}} = \dfrac{3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 11}{\overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} = \dfrac{3^n \cdot 5^n \cdot 3}{\overline{abc} \cdot 7 \cdot 13}$, fracția se simplifică cu 11, deci fracția este reductibilă.

7. Demonstrați că $\sqrt{2018} + \sqrt{2019} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rezolvare

Demonstrația o realizăm prin reducere la absurd. Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2018} + \sqrt{2019} \in \mathbb{Q}$. Ridicând la pătrat rezultă $\left(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}\right)^2 = \left(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}\right) \cdot \left(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}\right) = \left(\sqrt{2018} \cdot \sqrt{2019}\right) \cdot \sqrt{2018} + \left(\sqrt{2018} + \sqrt{2019}\right) \cdot \sqrt{2019} = 2018 + \sqrt{2018} \cdot \sqrt{2019} + \sqrt{2018} \cdot \sqrt{2019} + 2019 = 4037 + 2\sqrt{2018 \cdot 2019}$. (Am folosit distributivitatea înmulțirii față de adunare ținând cont de $a^2 = a \cdot a$.) Am găsit că $4037 + 2\sqrt{2018 \cdot 2019} \in \mathbb{Q}$, deci rezultă că $2 \cdot \sqrt{2018 \cdot 2019} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2018 \cdot 2019} \in \mathbb{Q}$, dar $2018 \cdot 2019 \neq$ pătrat perfect, contradicție $\Rightarrow$ Presupunerea făcută nu este adevărată. $\Rightarrow \sqrt{2018} + \sqrt{2019} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, adică este număr irațional.

8. Găsiți valoarea de adevăr a propoziției:

Numărul $\sqrt{2 \cdot \{310 + 5 \cdot [10 + 10 \cdot (12 + 12 : 12)]\}}$ este număr irațional.

Rezolvare

Ținând cont de ordinea desfacerii parantezelor și de ordinea efectuării operațiilor avem:

$$2\cdot\{310+5\cdot[10+10\cdot(12+1)]\}=2\cdot[310+5\cdot(10+10\cdot 13)]=$$
$$=2\cdot[310+5\cdot(10+130)]=2\cdot(310+5\cdot 140)=2\cdot(310+700)=2\cdot 1010=2020,$$

deci obținem $\sqrt{2020}=\sqrt{4\cdot 505}=2\sqrt{505}$, adică numărul este irațional și propoziția este adevărată.

9. Fie $A=\{[(2015+2):2017+2017]:2018+2018\}:2019+2024$. Ce fel de număr este numărul $\sqrt{A}$, rațional sau irațional?

Rezolvare

Ținând cont de ordinea desfacerii parantezelor și de ordinea efectuării operațiilor avem $A=[(2017:2017+2017):2018+2018]:2019+2024=$
$=(2018:2018+2018):2019+2024=2019:2019+2024=2025.$

Deci, $A=2025\Rightarrow\sqrt{A}=\sqrt{2025}=45$, adică este număr rațional.

P.S. VII. 267, Revista Alpha, Nicolae Ivășchescu

10. Arătați că soluția ecuației $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}}}=3$ este un număr natural.

Rezolvare

Ridicând la pătrat obținem $1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}}=9\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}}=8\,|:2\Rightarrow\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}}=4$, deci
$1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}=16\Rightarrow 3\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}=15\,|:3\Rightarrow\sqrt{1+4\sqrt{1+5x}}=5.$
Ridicând din nou la pătrat obținem $1+4\sqrt{1+5x}=25\Rightarrow 4\sqrt{1+5x}=$
$=24\,|:4\Rightarrow\sqrt{1+5x}=6$. Ridicând la pătrat găsim $1+5x=36\Rightarrow 5x=35\Rightarrow$
$\Rightarrow x=7$, deci $S=\{7\}$.

(Verificarea este imediată, adică $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\cdot 7}}}}=$
$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+24}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}=$
$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3.$)

PROBLEME PROPUSE

1. Fie mulțimile de numere naturale $A=\{x,\ x+3,\ 2x+3,\ 3x+1,\ 4x-2\}$ și $B=\{2x-4,\ 2x-1,\ 3x-1,\ 4x-3,\ 3x+2\}$.

Aflați pentru ce valori ale lui x avem $A=B$.

2. Ce fel de număr este numărul $A=\sqrt{9k+6}$, $k\in\mathbb{N}$, rațional sau irațional?

3. Se dă mulțimea:

$$M=\left\{(-2)^2;\ 5;\ (-1)^3;\ \sqrt{\frac{16}{25}};\ \sqrt{40};\ \sqrt{0,(4)};\ 1,1(3);\ \sqrt{27};\ \left(\frac{1}{3}\right)^3;\ -0,7\right\}.$$

Calculați:

$M\setminus\mathbb{Q}$, $M\cap\mathbb{Z}$, $M-\mathbb{Z}$, $M\cap\mathbb{Q}$, $M\cap\mathbb{N}$, $M\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$, $M\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$.

4. Determinați x și y pentru care $\sqrt{0,xx(y)-0,yy(x)}=0,9(3)$.

5. Calculați $\sqrt{A}$, unde $A=5+5\cdot4+5^2\cdot4+5^3\cdot4+\ldots+5^{2019}\cdot4$.

6. Aflați numărul natural x pentru care:

$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+x(x+1)(x+2)=756$.

7. Fie $A=\sqrt{(2+4+6+\ldots+4034)\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2017\cdot2018}\right)}$.

Ce fel de număr este A, rațional sau irațional?

8. Calculați $A=\sqrt{\{[(2022-4):2018+2018]:2019+2019\}:2020}$.

9. Ce fel de număr este numărul $A=\sqrt{9^n+3^{2n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$, rațional sau irațional?

10. Ce fel de număr este numărul $B=\sqrt{1+3+5+7+\ldots+113}$, rațional sau irațional?

OLIMPIADE ȘI CONCURSURI

1. Demonstrați că dacă $8 \mid x+3y$, atunci $\dfrac{x+3y}{7x+5y}$ este reductibilă oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}^*$.

2. Se dă numărul $A=\sqrt{n(n+3)(n+4)(2n+1)(7n+2)+2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Ce fel de număr este numărul A, rațional sau irațional?

3. Comparați numerele $A=\dfrac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2014}}$ și $B=\dfrac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2015}}$.

G.M. 343, R.M.V.J., Nicolae Ivășchescu

4. Aflați valorile naturale ale lui n, diferite de 5, pentru care $\sqrt{\dfrac{3n+9}{n-5}} \in \mathbb{N}$.

P.S. VII. 267, Revista „Alpha", Nicolae Ivășchescu

5. Se dau mulțimile $A=\{2x-3,\ x-1,\ 3x+1,\ 4x-1\}$ și $B=\{3x-6,\ 2x-4,\ 4x-2,\ 3x+2\}$.
Determinați x pentru care $A=B$.

E: 14736, G.M., Nicolae Ivășchescu

6. Aflați numerele naturale a, b, c, d pentru care:
$\sqrt{a^2-4a+13}+\sqrt{b^2-6b+25}+\sqrt{c^2-8c+41}+\sqrt{d^2-10d+61}=18$.

P.S. VII. 2368, Revista „Alpha",
Nicolae Ivășchescu

7. Comparați numerele A, B, C, D unde:
$A=\sqrt{2+4+6+\ldots+4028+2015}$;
$B=\sqrt{2015+2(1+2+3+\ldots+2014)}$;
$C=\sqrt{1+3+5+\ldots+4031}$;
$D=\sqrt{1+2+3+\ldots+2014+1008\cdot 2015}$.

P.S. VII. 2360, Revista „Alpha",
Nicolae Ivășchescu